

Анализ экономических проблем с помощью математических методов – мощный аппарат для принятия научно-обоснованных решений. Немаловажную роль в экономике страны играют финансовые операции, проводимые между экономическими субъектами. Для предприятия доход, получаемый от операций с ценными бумагами, является одним из источников прибыли. Средства прибыли являются для предприятия единственным источником расширения объема производства, освоения новых видов продукции и повышения ее качества, технического перевооружения и т. д. Благодаря работам Х.Марковица и Д.Тобина, за которые их авторы позже получили Нобелевские премии, стало возможным исследование финансовых операций с помощью методов финансовой математики.

На финансовом рынке обращается, как правило, множество ценных бумаг: государственные ценные бумаги, акции частных фирм, векселя и т. п. Если у участника рынка есть свободные деньги, то их надо отнести в банк и получать проценты или купить на них ценные бумаги и получать дополнительный доход. Но в какой банк отнести? Какие ценные бумаги купить? Малорисковые ценные бумаги и мало доходны; высокодоходные более рискованные. Набор ценных бумаг, находящихся у участника рынка, называется его портфелем. Теория Х. Марковица и Д. Тобина диктует изящное решение: структура рискованных ценных бумаг портфеля ценных бумаг должна повторить структуру большого рынка этих бумаг. Инвестор может лишь варьировать долей безрисковых ценных бумаг (больше таких бумаг – меньше доход и меньше риск, и наоборот).

Стоимость портфеля – это суммарная стоимость всех составляющих его бумаг. Доходность – это доходность на единицу его стоимости. Пусть x_i – доля капитала, потраченная на покупку ценных бумаг i -го вида. Весь выделенный капитал принимается за единицу. Пусть d_i – доходность в процентах годовых ценных бумаг i -го вида в расчете на одну денежную единицу. Тогда задача увеличения капитала портфеля эквивалентна аналогичной задаче о доходности портфеля d_p , выраженной через доходности бумаг и их доли.

Доходность бумаг колеблется во времени, так что будем считать ее случайной величиной, m_i , r_i – соответственно эффективностью и риском i -ой ценной бумаги. Т. е. $m_i = M[d_i]$ – математическое ожидание доходности и $r_i = \sqrt{V_{ii}}$, где V_{ii} – вариация или дисперсия i -ой доходности. Эффективность и

риск портфеля выражены через эффективности составляющих его ценных бумаг и их совместные ковариации:

$$M[d_p] = x_1 M[d_1] + \dots + x_n M[d_n] = \sum x_i m_i;$$

$$D[d_p] = \sum x_i x_j V_{ij},$$

где m_p – эффективность портфеля, r_p – риск портфеля.

Каждый владелец портфеля ценных бумаг сталкивается с дилеммой: хочется иметь эффективность побольше, а риск поменьше. Однако поскольку «нельзя поймать двух зайцев сразу», необходимо сделать определенный выбор между эффективностью и риском.

Американский экономист Г. Марковиц предложил математическую формализацию задачи формирования оптимального портфеля (портфель Марковица минимального риска). Экономист Д. Тобин заметил, что если на рынке есть безрисковые бумаги, то решение задачи об оптимальном портфеле значительно упрощается. Портфель Тобина минимального риска – это портфель Марковица при наличии на рынке безрисковых ценных бумаг.

Пусть m_0 – эффективность безрисковых бумаг, а x_0 – доля капитала, в них вложенного. В этом случае задача об оптимальном портфеле такова:

$$\sum_{j=1}^n x_i x_j V_{ij} \rightarrow \min$$

$$x_0 m_0 + \sum_{i=1}^n x_i m_i = m_p, \quad x_0 + \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Пусть V – матрица ковариаций рисков видов ценных бумаг, $X=(x_i)$, $M=(m_i)$ – вектор-столбцы долей капитала, вкладываемых в i -й вид рисков ценных бумаг и ожидаемых эффективностей этого вида, $i=1, \dots, n$. Пусть также I – n -мерный вектор-столбец, компоненты которого равны 1. Тогда оптимальное значение долей x_i есть

$$X^* = \frac{m_p - m_0}{(M - m_0 I)^T V^{-1} (M - m_0 I)} V^{-1} (M - m_0 I)$$

Исходя из данной записи, можно сделать вывод, что структура рисковей части портфеля не зависит от его эффективности m_p . Но компоненты вектора X^* пропорционально увеличиваются с ростом m_p , поэтому доля x_0 безрисковых вложений будет сокращаться.

Тогда, используя вышеуказанные формулы и положения, можно сформировать оптимальный портфель ценных бумаг заданной эффективности, содержащий как безрисковые, так и некоррелированные рисковей ценные бумаги. Если решение этой задачи $x_i^* \geq 0$, то это означает рекомендацию вложить долю x_i^* наличного капитала в ценные бумаги i -го вида. Если же $x_i^* < 0$, то содержательно это означает провести операцию «short sale». Если такие операции невозможны, значит, необходимо ввести ограничения $x_i^* \geq 0$.

Таким образом, предложено эффективное решение задачи формирования оптимального портфеля ценных бумаг.